PETŐFI PÁLYÁZAT
Matematika
2019-2020 tanév

XI ÉVFOLYAM

1. **feladat**

Hányféleképpen juthatunk el az origóból a (3;7) koordinátájú pontba, ha egységnyi hosszúakat lépünk, és csak jobbra vagy felfelé léphetünk!

2. **feladat**

A *H* alaphalmaz az 1000-nél nem nagyobb pozitív egész számok halmaza.
Az alaphalmaz három részhalmaza *A*, *B* és *C*, *A* a 3-mal, *B* az 5-tel, végül *C* a 7-tel osztható számok halmaza.

a. Hány eleme van az *A*, a *B* illetve a *C* halmaznak?
b. Hány elemű az $A \cup B$ halmaz?
c. Hány olyan 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely 3-hoz, 5-höz és 7-hez is relatív prím?

3. **feladat**

Egy osztályban 24-en írtak matematika dolgozatot. Feleannyi 5-ös dolgozat volt, mint 4-es. A dolgozatok közül 20%-kal több volt a 3-as, mint a 2-es. A 4-es és 5-ös dolgozatok együttes száma megegyezett az 1-es, 2-es és 3-as dolgozatok együttes számával. Mennyi volt a dolgozatok

a. átlaga;
b. módusza;
c. mediánja?

4. **feladat**

Az ABC háromszög oldalaira kifelé négyzeteket emeltünk. Két szomszédos négyzet a háromszög azonos csúcsaiból induló oldalainak másik végpontjait összekötő szakaszok x, y, z. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x+y+z}{s_a+s_b+s_c}=2,$$

ahol s_a, s_b, s_c a háromszög súlyvonalai.

5. **feladat**

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a. $log_2\sqrt{2x^2+3x+2} - log_2\sqrt{1+x-x^2} = 1$

b. $sin(x+y) + cos(x - 2y) = 2$

6. **feladat**

a. Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az $f(x)=|x-1|-|x+6|$ függvényt a [-10; 3] zárt intervallumon!

b. Az *m* valós paraméter értékétől függően hány megoldása van a valós számok halmazán az alábbi egyenletnek?

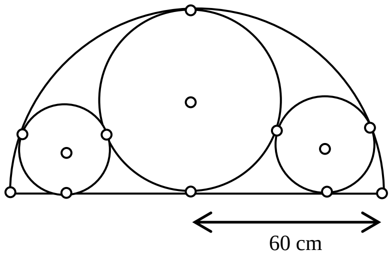
$$|x-1|-|x+6| = mx$$

A feladatokat a Petőfi pályázatokra érvényes általános szabályai szerint kérem beadni. A feladatokat, ahol szükséges, világos magyarázatokkal lássuk el. Törekedjünk az áttekinthető és egyértelmű megoldásokra. Útbaigazításért keressétek Takács Sándor tanár urat! A beadási határidő: 2020.02.28.

PETŐFI PÁLYÁZAT
Matematika
2019-2020 tanév

7. feladat

Egy templom építésekor az ábra szerinti félkör alakú ablakkeretbe három kör alakú díszítőelemet terveztek. A szimmetrikusan elhelyezkedő díszítő körablakok egymást és a keretet is érintik. Számítsuk ki a két kisebb kör alakú ablak sugarát!



8. feladat

Adott a valós számok halmazán értelmezett két függvény: $f(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{3}{4}x + \frac{5}{3}$, $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5x}{12} + 0{,}5$.

a) Mely pontban metszi az f függvény a derékszögű koordináta-rendszer y tengelyét?
b) Mely pontban metszi a g függvény a derékszögű koordináta-rendszer x tengelyét?
c) Oldja meg az $f(x) - 2 \geq g(x)$ egyenlőtlenséget!

9. feladat

Egy trapézt két átlója négy háromszögre bont. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe t=10 cm^2, T=26 cm^2. Számítsuk ki a trapéz területét!

10. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} \dfrac{1}{lgx} + \dfrac{1}{lgy} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{lgx}{lgy} + \dfrac{lgy}{lgx} = \dfrac{13}{6} \end{cases}$$

A feladatokat a Petőfi pályázatokra érvényes általános szabályai szerint kérem beadni. A feladatokat, ahol szükséges, világos magyarázatokkal lássuk el. Törekedjünk az áttekinthető és egyértelmű megoldásokra. Útbaigazításért keressétek Takács Sándor tanár urat! A beadási határidő: 2020.02.28.

PETŐFI PÁLYÁZAT
Matematika
2019-2020 tanév

XII. évfolyam

1. feladat

Egy üvegben feketekávé van, egy tálban pedig tej. Öntünk egy kis kávét a tejbe, majd egy kis tejeskávét vissza az üvegbe, hogy ugyanannyi folyadék legyen mindkét edényben, mint az elején. Több, kevesebb, vagy ugyanannyi kávé van most a tálban, mint amennyi tej az üvegben? Válaszodat indokold!

2. feladat

Határozzuk meg az n természetes szám azon értékeit, amelyre az

$$M=\left(\frac{1}{1\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 20}+\frac{1}{5\cdot 28}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(8n+4)}\right)^{-1}$$

kifejezés értéke is természetes szám lesz!

3. feladat

Egy k kör érinti az $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ egyenletű kört és a koordináta-tengelyeket. Mekkora a k kör sugara. Vizsgáld az összes lehetséges esetet!

4. feladat

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x^2+y^2+20x-22y+221=0$
b) $\sqrt{16x^2-8x+2}+\sqrt{25y^2+20y+13}=4$

5. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a,b,c nemnegatív számokra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geq\sqrt{2}\cdot(a+b+c)$$

6. feladat

Adott az $f:\mathbb{R}\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+b}{4(x-1)}$ függvény, ahol a és b valós paraméterek.

a) Határozzuk meg az a és b értékét úgy, hogy az f függvény grafikus képe érintse az Ox tengelyt az x=4 abszcisszájú pontban!
b) Ábrázoljuk az $g:\mathbb{R}\{1\}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=\frac{x^2-8x+16}{4(x-1)}$ függvényt!
c) Számítsuk ki a függvény grafikus képe, az Ox tengely és az x=-2, x=0 egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

7. feladat

a) Oldjuk meg a sin*x* = cos*x* egyenletet!
b) Tekintsük a [0; π/2] intervallumon a sin*x* és a cos*x* függvények grafikonját! A két grafikon metszéspontjában mindkét grafikonhoz érintőt húztunk. Írja fel a két érintő egyenletét!
c) A [0; π/2] intervallumon megrajzoltuk a sin*x* és a cos*x* függvények grafikonját. Határozza meg a két függvény grafikonja és az *y*-tengely által határolt görbe oldalú „háromszög" területét!

8. feladat

Az ABCD négyzet síkjára merőlegesen felvesszük az SA szakaszt úgy, hogy SA=AB=a.

a. Igazoljuk, hogy $BD\perp SC$!
b. Számítsuk ki a BD és SC egyenesek közti távolságot!
c. Ha M a CD oldal középpontja, számítsad ki az S pont távolságát a BM egyenestől!

A feladatokat a Petőfi pályázatokra érvényes általános szabályai szerint kérem beadni. A feladatokat, ahol szükséges, világos magyarázatokkal lássuk el. Törekedjünk az áttekinthető és egyértelmű megoldásokra. Útbaigazításért keressétek Takács Sándor tanár urat! A beadási határidő: 2020.02.28.

PETŐFI PÁLYÁZAT
Matematika
2019-2020 tanév

9. feladat

Adjuk meg a következő trigonometrikus egyenlet összes megoldását a $[0;2\pi]$ intervallumon:

$$3\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

10. feladat

Adott az $f:]-3,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$ függvény.

a) Számítsuk ki a $\int_0^1 (x+3)f(x)dx$ határozott integrál értékét!

b) Számítsuk ki a $\int_0^1 f(x)dx$ határozott integrál értékét!

c) Minden n természetes szám esetén legyen $I_n = \int_0^1 e^x (x+3)^n (f(x))^n dx$. Bizonyítsuk be, hogy $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, bármely $n\geq 1$ természetes szám esetén!

A feladatokat a Petőfi pályázatokra érvényes általános szabályai szerint kérem beadni. A feladatokat, ahol szükséges, világos magyarázatokkal lássuk el. Törekedjünk az áttekinthető és egyértelmű megoldásokra. Útbaigazításért keressétek Takács Sándor tanár urat! A beadási határidő: 2020.02.28.