

Petőfi pályázat (2018-2019) - XI-XII évfolyam

1. feladat

Oldjuk meg az alábbi irracionális egyenletet!

$$2 \cdot x^2 + x + \sqrt{2 \cdot x^2 + x + 1} = 5$$

2. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

3. feladat

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

- $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{3}{2} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{3}{2} = 0$
- $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos|x|}{1 - \sin|x|}$

4. feladat

Két a élű szabályos tetraéder magassága közös, az egyik azonban a másikhoz képest közös magasságuk körül 60° -kal elforgatott. Számítsuk ki a két tetraéder közös részének térfogatát és felszínét!

5. feladat

Adott a következő törtkifejezés:

$$F(x) = \frac{\sin 3x + \cos 3x + \sin 5x + \cos 5x + \sin 7x + \cos 7x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$$

- Mutassuk ki, hogy az $F(x)$ kifejezés a következő alakra hozható:

$$F(x) = 1 + \operatorname{tg} 5x$$

- Oldjuk meg az $F(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)$ egyenletet!
- Határozzuk meg a $G(x) = F(x) + F\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ függvény periódusát!

6. feladat

Az ABC hegyesszögű háromszög egy tetszőleges belső P pontján át párhuzamosokat húztunk az oldalakkal. Így három kisebb háromszögre és három négyszögre bontottuk az ABC háromszöget.

- Adja meg az ABC háromszög területét a kisebb háromszögek területének függvényében!
- A kisebb háromszögek területe t_1 , t_2 , t_3 , az ABC háromszög területe T .
- Igazolja, hogy $\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T}$!

7. feladat

Adott a $\left(\sqrt[5]{3 \cdot x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{5 \cdot x^3}}\right)^n$ kifejezés. Tudjuk, hogy a binomiális kifejtés 17. tagja állandó. Mekkora a kitevő?

8. feladat

Úticélunkat két villamossal, az a és a b jelűvel tudjuk elérni. Az a jelű villamos 5 percnként közlekedik, a b jelű 12 percnként. Az első villamos mindkét viszonylatban reggel 5 órakor indul. Reggel 7 óra és $\frac{1}{2}$ 8 óra között véletlenszerűen érkezünk a megállóba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megállóban nem kell 2 percnél tovább várakoznunk?

A feladatokat a Petőfi pályázatokra érvényes általános szabályai szerint kérem beadni. A feladatokat, ahol szükséges, világos magyarázatokkal lássuk el. Törekedjünk az áttekinthető és egyértelmű megoldásokra. Útbaigazításért keressétek Takács Sándor tanár urat! A beadási határidő: 2019.02.15.